CALCUL ALGEBRIQUE, EQUATIONS ET INEQUATIONS

Autres exemples sur la resolution d'un système par combinaison linéaire

Enoncés :

Exercice 1

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 4y = 25 \\ 4x - 2y = 64 \end{cases}$

Exercice 2

Julie a payé 17 euros pour 5 kg d'oranges et 1 kg de bananes.
Fatima a payé 19 euros pour 3 kg d'oranges et 5 kg de bananes.
Quel est le prix d'un kilo d'oranges et d'un kilo de bananes ?

Exercice 3

Un groupe de 27 personnes va au théâtre. Les adultes paient 45 € et les enfants paient moitié prix.
Leur dépense totale s'élève à 877,50 €.
On veut connaître le nombre d'adultes et le nombre d'enfants de ce groupe.
Résoudre ce problème :
a) en utilisant une méthode algébrique ;
b) en faisant appel à une démarche arithmétique.

Exercice 4

On cherche à déterminer un nombre composé de trois chiffres dont la somme est 16.
Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités il augmente de 198. **Le nombre recherché est :**
a) ☐ 185 **b)** ☐ 286 **c)** ☐ 385 **d)** ☐ 392

Autres exemples s ur la resolution d'un système par combinaison linéaire

Corrigés :

Exercice 1

• Résolution par la méthode par substitution

La méthode par substitution consiste à exprimer, dans l'une des équations, une inconnue en fonction de l'autre. Comme le coefficient de x est 1, il est plus facile d'exprimer x en fonction de y dans la première équation : $x + 4y = 25$.
On a donc $x = 25 - 4y$.
Puis on remplace x par la valeur $25 - 4y$ dans la deuxième équation.
On obtient un nouveau système équivalent au système précédent :

$$\begin{cases} x = 25 - 4y \\ 4(25 - 4y) - 2y = 64 \end{cases}$$

Après réduction de la deuxième équation, on obtiendra un système équivalent :

$$\begin{cases} x = 25 - 4y \\ 100 - 16y - 2y = 64 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\begin{cases} x = 25 - 4y \\ -18y = 64 - 100 \end{cases}$

et à $\begin{cases} x = 25 - 4y \\ -18y = -36 \end{cases}$

donc à $\begin{cases} x = 25 - 4y \\ \dfrac{-18y}{-18} = \dfrac{-36}{-18} \end{cases}$ et à $\begin{cases} x = 25 - 4y \\ y = 2 \end{cases}$

Puis on remplace y par 2 dans la première équation, on a alors :

$\begin{cases} x = 25 - 4 \times 2 \\ y = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 17 \\ y = 2 \end{cases}$

On en déduit que le couple (17 ; 2) est solution du système.
On peut aussi écrire (x ; y) = (17 ; 2).

• Résolution par la méthode par combinaison linéaire

$$\begin{cases} x + 4y = 25 \\ 4x - 2y = 64 \end{cases}$$

Le principe consiste à éliminer une des inconnues en additionnant les deux égalités membre à membre. Ici, il est plus aisé d'éliminer x en multipliant la première équation par -4 ce qui donne $-4(x + 4y) = -4 \times 25$, soit $-4x - 16y = -100$.

On obtient alors le système équivalent suivant : $\begin{cases} -4x - 16y = -100 \\ 4x - 2y = 64 \end{cases}$

Après une addition membre à membre des deux équations, on obtient :
$-16y - 2y = -100 + 64$, soit $-18y = -36$ donc le système proposé a pour solution $y = 2$ et $x = 17$.

La solution du système est donc le couple (17 ; 2).

Autres exemples sur la resolution d'un système par combinaison linéaire

Corrigés (suite) :

Exercice 2

Soit x le prix de 1 kg d'oranges et y le prix de 1 kg de bananes.
Les deux indications fournies par l'énoncé nous permettent une mise en équations du problème sous forme d'un système d'équations : $\begin{cases} 5x + y = 17 & (1) \\ 3x + 5y = 19 & (2) \end{cases}$

• Résolution par la méthode par substitution

On exprime y en fonction de x dans l'équation (1) : $y = 17 - 5x$.
On remplace y par cette valeur dans l'équation (2) pour obtenir le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} y = 17 - 5x \\ 3x + 5(17 - 5x) = 19 \end{cases}$$

Après développement puis simplification, on obtient :

$$\begin{cases} y = 17 - 5x \\ 3x + 85 - 25x = 19 \end{cases}$$

Après simplifications successives, on obtient :

$$\begin{cases} y = 17 - 5x \\ -22x = 19 - 85 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} y = 17 - 5x \\ -22x = -66 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 17 - 5x \\ x = \dfrac{-66}{-22} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 17 - 5x \\ x = 3 \end{cases}$

Puis en remplaçant x par sa valeur $\begin{cases} x = 3 \\ y = 17 - 5 \times 3 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Donc le prix d'un kilo d'oranges est de 3 € et celui d'un kilo de bananes est de 2 €.

• Résolution par la méthode par combinaison linéaire

$$\begin{cases} 5x + y = 17 & (1) \times (-5) \\ 3x + 5y = 19 & (2) \end{cases}$$

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par (– 5) :

$$\begin{cases} -25x - 5y = -85 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$$

Après une addition membre à membre des deux équations, on obtient : $-22x = -66$,
d'où $x = 3$ puis on en déduit $y = 2$.

Autres exemples sur la resolution d'un système par combinaison linéaire

Corrigés (suite) :

Exercice 3

a) éthode algébrique

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants : $x + y = 27$.
Comme les adultes paient 45 € alors que les enfants paient 22,5 € : $45x + 22{,}5y = 877{,}5$.
On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ 45x + 22{,}5y = 877{,}5 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} y = 27 - x \\ 45x + 22{,}5(27 - x) = 877{,}5 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} y = 27 - x \\ 45x + 607{,}5 - 22{,}5x = 877{,}5 \end{cases} \text{ et à } \begin{cases} y = 27 - x \\ 22{,}5x = 270 \end{cases}$$

$$\text{donc à } \begin{cases} y = 27 - x \\ x = \dfrac{270}{22{,}5} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \end{cases}$$

Le groupe est composé de 12 adultes et de 15 enfants.

b) Méthode arithmétique

La différence entre le tarif adulte et le tarif enfant est de 22,5 €.
Si l'entrée n'avait été payée que par des adultes, la dépense totale aurait été de 45×27, soit de 1 215 €.
On a donc une différence de 1 215 – 877,5, soit 337,5 €, avec la dépense totale réelle.
On en déduit que $\dfrac{337{,}5}{22{,}5}$, c'est-à-dire 15, représente le nombre d'enfants.
Et, par conséquent 27 – 15, c'est-à-dire 12, représente le nombre d'adultes.

Exercice 4

Réponse c.

Soit $\overline{abc}$ le nombre à trois chiffres.
La première indication donne $a + b + c = 16$.
La deuxième indication donne $\overline{abc} = \overline{bac} - 450$.
La troisième indication donne $\overline{abc} = \overline{cba} - 198$.

$$\text{On en déduit le système suivant : } \begin{cases} a + b + c = 16 \\ 100a + 10b + c = 100b + 10a + c - 450 \\ 100a + 10b + c = 100c + 10b + a - 198 \end{cases}$$

$$\text{Une première simplification donne } \begin{cases} a + b + c = 16 \\ 90a - 90b = -450 \\ 99a - 99c = -198 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} a + b + c = 16 & (1) \\ -a + b = 5 & (2) \\ -a + c = 2 & (3) \end{cases}$$

On peut exprimer b et c en fonction de a à partir des équations (1) et (2) puis remplacer b et c par leur valeur dans l'équation (1).

$$\begin{cases} a + (a + 5) + (a + 2) = 16 \\ b = a + 5 \\ c = a + 2 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 3a + 7 = 16 \\ b = a + 5 \\ c = a + 2 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Le nombre recherché est donc 385.

Pour poursuivre les révisions et approfondir vos connaissances…

Mathématiques 250 exercices, Mon cahier d'entrainement, Daniel Motteau, Saïd Chermak, Nathan, 2023.

Mathématiques-Français-Écrit 2024-2025, Daniel Motteau, Saïd Chermak, Anne-Rozenn Morel, Nathan, 2023.

Retrouvez dans ces ouvrages les savoirs fondamentaux pour préparer les épreuves du CRPE, de nombreux exercices et des conseils méthodologiques.